Das Finden einer jeden Summe einer Reihe aus dem gegebenen allgemeinen Term *

Leonhard Euler

§1 Nachdem ich die Dinge, die ich in der oberen Dissertation über die Summation von Reihen mit einer geometrischen Methode dargestellt habe, sorgfältiger betrachtet hatte und dieselbe Summationsweise analytisch untersucht hatte, habe ich erkannt, dass das, was ich geometrisch gefunden habe, aus einer gewissen eigenen Summationsmethode abgeleitet werden kann, von welcher ich schon vor drei Jahren in der Abhandlung über die Summation von Reihen eine Erwähnung gemacht hatte; danach hatte ich aber über sie nicht weiter nachgedacht. Die Kraft der analytischen Methode also ganz genau erforschend habe ich entdeckt, dass nicht nur die geometrisch gefundene Form in ihr enthalten ist, sondern auch mit ihrer Hilfe durch Addieren mehrerer Terme noch mehr erreicht werden kann, so dass sie schließlich die wahre Summe uneingeschränkt darbietet. Auf einem geometrischen Wege dieselben Terme zu finden, scheint aber höchst schwierig.

§2 Aber in jener Abhandlung über die Summation von Reihen, wenn der allgemeine Term einer gewissen Reihe x und ihr Index n war, habe in allum-

*Originaltitel: "Inverntio summae cuiusque seriei ex dato termino generali", erstmals publiziert in „*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8* 1738, pp. 9-22", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 14, pp. 108 - 123 ", Eneström-Nummer E47, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz" fassender Weise für den summatorischen Term die folgende Form dargeboten

$$\int xdn + \frac{x}{2} + \frac{dx}{12dn} - \frac{d^3x}{720dn^3} + \text{etc.},$$

aus welcher die Differentiale von x, weil ja x durch n gegeben zu sein festgelegt wird, von den Potenzen des Differentials dn, welches konstant angenommen wird, aufgehoben werden werden, so dass eine algebraische Summe erhalten wird, wenn freilich xdn eine Integration zulässt. Aber in der Integration von xdn muss eine so große Konstante hinzugefügt werden, dass der ganze Ausdruck nach Setzen von $n = 0$ verschwindet.

§3 Weil ich also beschlossen habe, diese Formel und ihren Gebrauch in dieser Abhandlung genauer zu behandeln, möchte ich vor allem die Art, auf welche ich die Formel erlangt habe, darlegen. Es ist nämlich eine einzigartige Analysis, die ich bei dieser Sache gebraucht habe, und sie gibt einige wunderschöne Kunstgriffe an die Hand, teils neue teils schon bekannte, die aber nirgends, sofern ich mich recht erinnere, hinreichend klar bewiesen worden sind.

§4 Aus der Natur des Infinitesimalkalküls folgt, wenn y auf irgendeine Weise durch x und Konstanten gegeben war und anstelle von x dann $x + dx$ geschrieben wird, dass dann y in $y + dy$ übergehen wird. Wenn nun weiter x um das Element dx vermehrt wird oder x in $x + 2dx$ übergeht, dann wird man anstelle von y danach $y + 2dy + ddy$ haben. Und wenn x erneut um das Element dx wächst, wird y darauf in $y + 3dy + 3ddy + d^3$ übergehen, wo die Koeffizienten dieselben sind wie bei den Potenzen des Binoms. Aus diesen Dingen folgt, wenn anstelle von x direkt $x + mdx$ eingesetzt wird, dann dann y in diese Form übergeht

$$y + \frac{m}{1}dy + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}ddy + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}d^3y + \text{etc.}$$

§5 Es sei nun für unser Unterfangen m eine unendlich große Zahl, damit mdx eine endliche Größe bedeuten kann; es wird der Wert, den y nach Setzen von $x + mdx$ anstelle von x haben wird, dieser sein

$$y + \frac{mdy}{1} + \frac{m^2d^2y}{1 \cdot 2} + \frac{m^3d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m^4d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

Wenn nun $mdx = a$ oder $m = \frac{a}{dx}$ wird, wird y, wenn für x entsprechend $x + a$ gesetzt wird, diese Form annehmen

$$y + \frac{ady}{1 \cdot dx} + \frac{a^2ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{a^3d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \text{etc.},$$

in welcher alle Terme von endlicher Größe sind.

§6 Diese Reihe selbst, welche den verwandelten Wert von y darbietet, wenn anstelle von x eben $x + a$ gesetzt wird, hat als erster der hochgeehrte TAYLOR in *Methodus incrementum directa et inversa* hervorgebracht und sie zu vielen außerordentlichen Gebräuchen verwendet. Es folgt natürlich zuerst die Erhebung des Binoms zu irgendeiner Potenz. Wie wenn der Wert von $(x + a)^m$ gesucht wird, setze ich

$$y = x^m$$

und es wird $(x + a)^m$ der Wert von y sein, wenn anstelle von x dort $x + a$ gesetzt wird. Weil also gilt

$$dy = mx^{m-1}dx, \quad d^2y = m(m-1)x^{m-2}dx^2$$

und so weiter, wird sein

$$(x+a)^m = x^m + \frac{max^{m-1}}{1} + \frac{m(m-1)a^2x^{m-2}}{1\cdot 2} + \text{etc.}$$

§7 Diese Reihe wendet TAYLOR weiter an, um die Wurzel aus irgendeiner Gleichung näherungsweise zu finden, was er auf diese Weise tut. Die Gleichung involviere irgendeine Unbekannte z, natürlich $Z=0$, wo Z eine aus der Unbekannten z und bekannten Größen irgendwie zusammengesetzte Größe ist. Darauf nimmt er x für einen z fast gleichen Wert und setzt die Größe von Z, die hervorgeht wenn anstelle von z wie gesagt x geschrieben wird, $=y$, sodass $y=0$ wäre, wenn x der wahre Wert von z wäre.

§8 Aber weil x vom wahren Wert von z ein wenig abweicht, setzt er fest, dass der wahre Wert von z demnach $x+a$ ist. Daher ist es klar, wenn in y anstelle von x dann $x+a$ gesetzt wird, dass y dann verschwinden wird. Aber wenn anstelle von x eben $x+a$ gesetzt wird, wird y übergehen in

$$y + \frac{ady}{1\cdot dx} + \frac{a^2ddy}{1\cdot 2\cdot dx^2} + \frac{a^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 2\cdot dx^3} + \text{etc.}$$

Dieser Sache wegen wird also sein

$$0 = y + \frac{ady}{1\cdot dx} + \frac{a^2ddy}{1\cdot 2\cdot dx^2} + \text{etc.}$$

Aus dieser Gleichung wird der gefundene Wert von a das verlangte zu x addierende Komplement a geben, mit welchem die Unbekannte z erhalten wird.

§9 Weil aber x an z sehr nahe heranzukommen festgelegt wird, wird die Größe a sehr klein sein, so dass in Bezug auf die zwei Anfangsterme alle folgenden verschwinden können. Und auf diese Weise entspringt $a=-\frac{ydx}{dy}$ und $z=x-\frac{ydx}{dy}$, welches ein um Vieles genauerer Wert von z als x ist. Wie für diese Gleichung

$$z^3 - 3z - 20 = 0$$

sein wird

$$y = x^3 - 4x - 20 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$$

und daher

$$z = x - \frac{x^3 - 3x - 20}{3xx - 3} = \frac{2x^3 + 20}{3xx - 3}.$$

Nachdem nun zuerst $x = 3$ gesetzt worden ist, wird $z = 3\frac{1}{12}$ sein und nachdem dieser Wert erneut für x festgelegt worden ist, wird z näherungsweise gefunden werden.

§10 Wenn weiter irgendeine Bedingung der Funktion y gegeben ist, die in einem gewissen Fall von x Geltung hat, wird die obere Formel in eine Gleichung übergehen, in welcher die Eigenschaft von y enthalten sein wird. Wie wenn y eine Funktion von dieser Art von x war, dass sie nach Setzen von $x = 0$ verschwindet, so setze ich $a = -x$; es wird nämlich auf diese Weise $x + a = 0$ werden und es wird sein

$$0 = y - \frac{xdy}{1 \cdot dx} + \frac{x^2ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \text{etc.}$$

oder

$$y = \frac{xdy}{1 \cdot dx} - \frac{x^2ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{x^3d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \text{etc.}$$

In dieser Gleichung ist die Natur all derer Funktionen von x enthalten, die nach Setzen von $x = 0$ verschwinden.

§11 Wenn für y dann $\int zdx$ eingesetzt wird, wird sein

$$dy = zdx, \quad \text{etc.} \quad ddy = dzdx, \quad d^3y = d^3zdx \quad \text{etc.;}$$

nach Einsetzen dieser Werte wird man haben

$$\int zdx = \frac{xz}{1} - \frac{x^2dz}{1 \cdot 2 \cdot dx} + \frac{x^3ddz}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^2} - \text{etc.},$$

in welcher Gleichung das Integral von zdx durch eine unendliche Reihe dargeboten wird. Und dies ist die allgemeine Quadratur von Kurven, welcher der hochgeehrte BERNOULLI in ACT. LIPS. angegeben hat; aber die Analysis, mit welcher er zu dieser Reihe gelangt ist, hat er nicht beigefügt.

§12 Nachdem aber diese Dinge nun abgehandelt worden sind, welche sich weniger auf unser Unterfangen beziehen, schreite ich nun zu den Reihen voran. Es sei also irgendeine Reihe vorgelegt

$$A + B + C + D + \cdots + X,$$

in welcher A den ersten Term bezeichnet, B den zweiten und X den, dessen Index x ist, sodass X der allgemeine Term der vorgelegten Reihe ist. Es werde aber die Summe dieser Progression wie folgt festgelegt

$$A + B + C + D + \cdots + X = S:$$

es wird also S der summatorische Term sein und so S wie X, wenn die Reihe bestimmt war, werden aus x und Konstanten zusammengesetzt sein.

§13 Weil nun S die Summe so vieler Terme der Reihe darbietet, wie Einheiten in x enthalten sind, wenn in S anstelle von x dann $x-1$ geschrieben wird, wird man die erste Summe um den letzten Term X vermindert haben. Mit dieser Substitution wird also S in $S-X$ übergehen. Es werden also diese mit der oberen Formel verglichen; es wird $S=y$ und $a=-1$ sein, weswegen der transformierte Wert von S oder $S-X$ dieser sein wird

$$=S-\frac{dS}{1\cdot dx}+\frac{ddS}{1\cdot 2\cdot dx^2}-\frac{d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3}+\text{etc.}$$

Daraus entspringt diese Gleichung

$$X=\frac{dS}{1\cdot dx}-\frac{ddS}{1\cdot 2\cdot dx^2}+\frac{d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3}-\frac{d^4S}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot dx^4}+\text{etc.}$$

§14 Mit Hilfe dieser Gleichung wird also aus dem gegebenen summatorischen Term einer jeden Reihe der allgemeine Term gefunden. Weil dies aber ansonsten sehr leicht ist, wäre es überflüssig diese Methode zu gebrauchen, um den allgemeinen Term aus dem summatorischen zu finden. Es ergibt sich aber dieser sogar große Vorteil bei dieser Gleichung, dass die einzelnen Terme entwickelt sind und deshalb für einzigartige Anwendungen haben. Denn mit einer bekannten Methode kann diese Reihe

$$X=\frac{dS}{1\cdot dx}-\frac{ddS}{1\cdot 2\cdot dx^2}+\frac{d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3}-\text{etc.}$$

invertiert werden, dass aus dem allgemeinen Term X der summatorische S bestimmt wird; dieses selbst wird am meisten verlangt.

§15 Wir wollen also setzen

$$\frac{dS}{dx} = \alpha X + \frac{\beta dX}{dx} + \frac{\gamma ddX}{dx^2} + \frac{\delta d^3X}{dx^3} + \frac{\varepsilon d^4X}{dx^4} + \text{etc.},$$

so dass ist

$$S = \alpha \int Xdx + \beta X + \frac{\gamma X}{dx} + \frac{\delta ddX}{dx^2} + \text{etc.}$$

Es wird also sein

$$\frac{ddS}{dx^2} = \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta ddX}{dx^2} + \frac{\gamma 4^3X}{dx^3} + \frac{\delta d^4X}{dx^4} + \text{etc.}$$

und

$$\frac{d^3S}{dx^3} = \frac{\alpha ddX}{dx^2} + \frac{\beta d^3X}{dx^3} + \frac{\gamma d^4X}{dx^4} + \text{etc.}$$

und

$$\frac{d^4S}{dx^4} = \frac{\alpha d^3X}{dx^3} + \frac{\beta d^4X}{dx^4} + \text{etc.}$$

sowie

$$\frac{d^5S}{dx^5} = \frac{\alpha d^4X}{dx^4} + \text{etc.}$$

§16 Es werden also diese Reihen anstelle eines jeden Termes der oberen Reihe eingesetzt und die gleichen Terme miteinander verglichen und gleich Null gesetzt. Danach werden die Koeffizienten α, β, γ etc. so bestimmt werden, dass es sich wie folgt verhält

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 1, \\
\beta &= \frac{\alpha}{2}, \\
\gamma &= \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6}, \\
\delta &= \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24}, \\
\varepsilon &= \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{24} - \frac{\alpha}{120}, \\
\zeta &= \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\delta}{6} + \frac{\gamma}{24} - \frac{\beta}{120} + \frac{\alpha}{720} \\
&\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

§17 Die Koeffizienten α, β, γ, δ etc. legen also eine Reihe von solcher natürlicher Beschaffenheit fest, dass ein jeder Term aus allen vorausgehenden bestimmt wird, während der erste $= 1$ ist. Aber die Zahlen, durch welche die einzelnen der vorausgehenden Terme dividiert werden müssen, legen die von Wallis *hypergeometrische* genannte Progression fest

$$2, \quad 6, \quad 24 \quad 120, \quad 720, \quad 5040 \quad \text{etc.}$$

Aber die Reihe der Koeffizienten α, β, γ etc. selbst ist so beschaffen, dass ich kaum glaube, dass für sie ein allgemeiner Term dargeboten werden kann.

§18 Für unser Unternehmen müssen wir also zufrieden sein, die Reihe der Koeffizienten, so weit wie es beliebt, fortgesetzt zu haben, was aus dem Fortschreitungsgesetz leicht getan werden kann. Ich habe aber diese nachfolgende

Reihe gefunden

$$+1, \ +\frac{1}{1\cdot 2}, \ +\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2}, \ +0, \quad -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}, \ -0, \quad +\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 6}, \ 0,$$
$$-\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}, \ -0, \ +\frac{5}{1\cdots 11\cdot 6}, \ +0, -\frac{691}{1\cdots 13\cdot 210}, \ -0$$
$$+\frac{35}{1\cdots 15\cdot 2}, \ +0, \ -\frac{3617}{1\cdots 17\cdot 30} \ \text{etc.}$$

§19 Wenn also anstelle von α, β, γ etc. diese Terme eingesetzt werden, wird man diesen summatorischen Term haben

$$S = \int Xdx + \frac{X}{1\cdot 2} + \frac{dX}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot dx} - \frac{d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot dx^3} + \frac{d^5}{1\cdots 7\cdot 6\cdot dx^5}$$
$$-\frac{3d^7X}{1\cdots 9\cdot 10\cdot dx^7} + \frac{5d^9X}{1\cdots 11\cdot 6\cdot dx^9} - \frac{691d^{11}X}{1\cdots 13\cdot 210\cdot dx^{11}}$$
$$+\frac{35d^{13}X}{1\cdots 15\cdot 2\cdot dx^{13}} - \frac{3617d^{15}X}{1\cdots 17\cdot 30\cdot dx^{15}} + \text{etc.}$$

§20 Diese Reihe hat einen riesigen Nutzen beim Finden von Summen algebraischer Progressionen, in deren allgemeinen Termen x nie in den Nenner eingeht. Weil nämlich auf diese Weise x überall ganzzahlige positive Exponenten hat, werden seine Differentiale schließlich verschwinden und die Reihe wird abbrechen, woher der summatorische Term selbst in einer endlichen Anzahl von Termen aufgefunden werden wird. Beim Finden von diesem können sofort alle Terme, die x nicht enthalten, verworfen werden, weil in $\int Xdx$ eine so große Konstante hinzuaddiert werden muss, die bewirkt, dass $S = 0$ wird, nachdem $x = 0$ gesetzt worden ist.

§21 Damit der Gebrauch dieser Formel besser begriffen wird, ist es ratsam, gewisse Beispiele anzuführen. Es sei also $X = x$ oder diese Reihe zu summieren

$$1 + 2 + 3 + \cdots + x;$$

wegen

$$\int X dx = \frac{x^2}{2}$$

wird die Summe sein

$$S = \frac{x^2 + x}{2};$$

denn $\frac{dX}{dx}$ ist konstant und wird deshalb verworfen, und alle folgenden Differentiale verschwinden von selbst.

Es sei weiter $X = x^2$ oder diese Reihe

$$1 + 4 + 9 + \cdots + x^2$$

zu summieren; es wird sein

$$\int X dx = \frac{x^3}{3} \quad \text{und} \quad \frac{dX}{dx} = 2x$$

und daher die Summe der Reihe

$$S = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}.$$

§22 Es sei nun diese allgemeine Reihe der Potenzen der naürlichen Zahlen vorgelegt

$$1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + \text{etc.},$$

deren allgemeiner Term x^n ist. Man wird also $X = x^n$ haben und

$$\int X dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Die Differentiale werden sich aber so verhalten, dass ist

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dx} &= nx^{n-1}, \\
\frac{d^3X}{dx^3} &= n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \\
\frac{d^5X}{dx^5} &= n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Nachdem also diese Werte eingesetzt worden sind, wird der summatorische Term der vorgelegten Reihe dieser sein

$$\begin{aligned}
S = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{2} + \frac{nx^{n-1}}{2 \cdot 6} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-2}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 30} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 42} \\
- \frac{n(n-1)\cdots(n-6)x^{n-7}}{2 \cdot 3 \cdots 8 \cdot 30} + \frac{n(n-1)\cdots(n-8)5x^{n-9}}{2 \cdot 3 \cdots 10 \cdot 66} - \frac{n(n-1)\cdots(n-10)691x^{n-11}}{2 \cdot 3 \cdots 12 \cdot 2730} \\
+ \frac{n(n-1)\cdots(n-12)7x^{n-13}}{2 \cdot 3 \cdots 14 \cdot 6} - \frac{n(n-1)\cdots(n-14)3617x^{n-15}}{2 \cdot 3 \cdots 16 \cdot 510} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Um diese Reihe, so weit wie es von Nöten ist, fortzusetzen, ist es ebenso notwendig, dass jene obere Reihe α, β, γ etc. ebenso weit fortgesetzt wird.

§23 Aus dieser allgemeinen Summation der Reihe, deren allgemeiner Term x^n ist, können die Summen der folgenden Reihen der Potenzen abgeleitet werden und sie verhalten sich wie folgt

$$\begin{aligned}
\int x^1 &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\
\int x^2 &= \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x \\
\int x^3 &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \\
\int x^4 &= \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x \\
\int x^5 &= \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2 \\
\int x^6 &= \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x \\
\int x^7 &= \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2 \\
\int x^8 &= \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{30}x \\
\int x^9 &= \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{2}x^9 + \frac{3}{4}x^8 - \frac{7}{10}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{20}x^2 \\
\int x^{10} &= \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^9 - x^7 + x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{66}x \\
\int x^{11} &= \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{2}x^{11} + \frac{11}{12}x^{10} - \frac{11}{8}x^8 + \frac{11}{6}x^6 - \frac{11}{8}x^4 + \frac{5}{12}x^3 \\
\int x^{12} &= \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{2}x^{12} + x^{11} - \frac{11}{6}x^9 + \frac{22}{7}x^7 - \frac{33}{10}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{691}{2730}x \\
\int x^{13} &= \frac{1}{14}x^{14} + \frac{1}{2}x^{13} + \frac{13}{12}x^{12} - \frac{143}{60}x^{10} + \frac{143}{28}x^8 - \frac{143}{20}x^6 + \frac{65}{12}x^4 + \frac{691}{420}x^2 \\
\int x^{14} &= \frac{1}{15}x^{15} + \frac{1}{2}x^{14} + \frac{7}{6}x^{13} - \frac{91}{30}x^{11} + \frac{143}{18}x^9 - \frac{143}{10}x^7 + \frac{91}{6}x^5 - \frac{691}{90}x^3 + \frac{7}{6}x
\end{aligned}$$

$$\int x^{15} = \frac{1}{16}x^{16} + \frac{1}{2}x^{15} + \frac{5}{4}x^{14} - \frac{91}{24}x^{12} + \frac{143}{12}x^{10} - \frac{429}{16}x^{8} + \frac{455}{12}x^{6} - \frac{691}{24}x^{4} + \frac{35}{4}x^{2}$$
$$\int x^{16} = \frac{1}{17}x^{17} + \frac{1}{2}x^{16} + \frac{4}{3}x^{15} - \frac{14}{3}x^{13} + \frac{52}{3}x^{11} - \frac{143}{3}x^{9} + \frac{260}{3}x^{7} - \frac{1382}{15}x^{5} + \frac{140}{3}x^{3} - \frac{3617}{510}x$$
etc.

§24 Wenn aber x nicht überall positive Exponenten im allgemeinen Term der Reihe hat, dann besteht auch der Ausdruck der Summe aus unendlich vielen Termen, weil Reihen von dieser Art eine allgemeine Summation nicht zulassen, sondern gewisse Quadraturen involvieren. Dennoch habe ich indes bemerkt, dass mit Hilfe dieser Methode Reihen von solcher Art leicht sehr nah summiert werden können, was einen riesigen Nutzen bei Reihen hat, die kaum konvergieren und ansonsten schwer summiert werden. Wie das zu bewerkstelligen ist, werde ich an Beispielen lehren.

§25 Ich werde also zuerst die harmonischen Reihen betrachten und in vor allen anderen freilich diese

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.},$$

deren allgemeiner Term $\frac{1}{x}$ ist; der summatorische hingegen, er sei S, wird gesucht. Es ist also $X = \frac{1}{x}$ und

$$\int X dx = \text{Konst.} + \log x.$$

Und weiter

$$\frac{dX}{dx} = \frac{-1}{x^2}, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}, \quad \frac{d^X}{dx^5} = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6} \quad \text{etc.}$$

Nach Einsetzen von diesen geht hervor

$$S = \text{Konst.} + \log x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} + \frac{1}{240x^8} - \frac{1}{132x^{10}} \\ + \frac{691}{32760x^{12}} - \frac{1}{12x^{14}} + \text{etc.},$$

wo die hinzuzuaddierende Konstante so beschaffen sein muss, dass nach Setzen von $x = 0$ - wie es sein muss - $S = 0$ wird. Daraus kann aber wegen all der unendlichen großen Terme die Konstante nicht bestimmt werden.

§26 Um aber die Konstante zu bestimmen, muss ein anderer Fall angenommen werden, in welchem die Summe der Reihe bekannt ist; diesen wird man also haben, wenn eine gewisse Anzahl an Termen zu einer Summe gesammelt wird. Es werden also die zehn Anfangsterme summiert

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10}$$

und deren Summe wird aufgefunden werden als

$$= 2,9289682539682539;$$

dieser muss die Summe derselben Terme aus der Formel gleich sein, natürlich

$$\text{Konst.} + \log 10 - \frac{1}{20} - \frac{1}{1200} + \frac{1}{1200000} - \frac{1}{252000000} \\ + \frac{1}{24000000000} - \frac{1}{1320000000000} + \text{etc.}$$

Danach wird wegen

$$\log 10 = 2,302585092994045684$$

jene hinzuaddierte Konstante sein

$$= 0,5772156649015329$$

und nachdem diese einmal bestimmt worden ist, wird auch die Summe wie vieler Terme dieser Reihe auch immer aufgefunden werden

§27 Auf diese Weise habe ich also die Summe von 100, 1000, 10000 etc. Termen der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}+$etc. ausfindig gemacht und nachstehende Werte gefunden

$$\begin{aligned} \int 10 &= 2,9289682539682539, \\ \int 100 &= 5,1873775176396203, \\ \int 1000 &= 7,4854708605503449, \\ \int 10000 &= 9,7876060360443823, \\ \int 100000 &= 12,0901461298634280, \\ \int 1000000 &= 14,3927267228657236. \end{aligned}$$

§28 Wenn der erste Term der Reihe, 1, genommen wird, wird $S = 1$ und $x = 1$ und daher $\log x = 0$ sein. Man wird also aus der Gleichung haben

$$0,4227843350984670 = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120} - \frac{1}{252} + \frac{1}{240} - \frac{1}{132} + \frac{691}{32760} - \frac{1}{12} + \text{etc.}$$

Von dieser sehr unregelmäßigen und nicht einmal konvergenten Reihe ist also die Summe fast exakt gefunden worden. Die Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe wird aber sein

$$= \log \infty + 0,5772156649015329,$$

welche nach Setzen von $x = \infty$ hervorgeht.

§29 Wir wollen nun dazu voranschreiten, diese Reihe

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \text{etc.}$$

zu betrachten, in welcher $X = \frac{1}{2x-1}$ ist und

$$\int X dx = \text{Konst.} + \frac{1}{2}\log(2x-1)$$

sowie

$$\frac{dX}{dx} = \frac{-2}{(2x-1)^2}, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-2\cdot 4\cdot 6}{(2x-1)^4}, \quad \frac{d^5X}{dx^5} = \frac{-2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}{(2x-1)^6} \quad \text{etc.}$$

Nachdem also diese gefunden worden sind, wird die Summe der vorgelegten Reihe sein

$$S = \text{Konst.} + \frac{1}{2}\log(2x-1) + \frac{1}{2(2x-1)} - \frac{1}{6(2x-1)^2} + \frac{1}{15(2x-1)^4} - \frac{8}{63(2x-1)^6}$$

$$+\frac{8}{15(2x-1)^8}-\frac{128}{33(2x-1)^{10}}+\frac{256\cdot 691}{4095(2x-1)^{12}}-\frac{2048}{3(2x-1)^{14}}+\frac{1024\cdot 3617}{255(2x-1)^{16}}-\text{etc.}$$

§30 Aber die konstante Größe kann in diesem Fall, in dem tatsächlich einige Terme addiert werden, nicht so bequem bestimmt werden wie im vorhergehenden Fall. In diesem Fall erfährt man aber einige Hilfe, mit welcher die Konstante aus der vorhergehenden bestimmt werden kann. Die Summe der Reihe

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\text{etc.}$$

ins Unendliche fortgesetzt ist natürlich $=\text{Konst.}+\frac{1}{2}\log\infty$. Vom Doppelten dieser Reihe werde die erste harmonische Reihe subtrahiert; man wird haben

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\text{etc.},$$

deren Summe, wie bekannt ist, $\log 2$ ist. Es wird also sein

$$\log 2 = 2\text{Konst.}+\log\infty-\log\infty-0,577215\text{etc.}$$

und daher diese gesuchte Konstante

$$=0,6351814227307392.$$

§31 Ich schreite also zu höher zusammengesetzten Reihen voran und betrachte diese

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc.}$$

der reziproken Quadrate, deren allgemeiner Term $\frac{1}{x^2}=X$ ist. Es wird also sein

$$\int Xdx=\text{Konst.}-\frac{1}{x}$$

sowie

$$\frac{dX}{dx}=\frac{-2}{x^3},\quad \frac{d^2X}{dx^3}=\frac{-2\cdot 3\cdot 4}{x^5},\quad \frac{d^5X}{dx^5}=\frac{-2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{x^7}\quad \text{etc.}$$

Nach Einsetzen von diesen wird sein

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{x^2}=S$$
$$=\text{Konst.}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{30x^5}-\frac{1}{42x^7}+\frac{1}{30x^9}-\frac{5}{66x^{11}}+\frac{691}{2730x^{13}}+\text{etc.}$$

wo die Größe der Konstante aus einem Spezialfall bestimmt werden muss.

§32 Ich habe also tatsächlich die zehn Anfangsterme dieser Reihe addiert, deren Summe ich gefunden habe als

$$1,549767731166540.$$

Wenn also zu dieser, weil in diesem Fall $x=10$ ist, Folgendes hinzuaddiert wird

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{200}+\frac{1}{6000}-\frac{1}{3000000}+\frac{1}{420000000}-\frac{1}{30000000000}+\frac{1}{1320000000000}$$

$$-\frac{691}{2730000000000000}+\frac{7}{6000000000000000}-\text{etc.},$$

geht aus diesem also jene hinzuzufügende Konstante als $= 1,64493406684822643647$ hervor. Und dieser Konstante ist die Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe gleich; denn nach Setzen von $x = \infty$ wird $S = \text{Konst.}$, während alle Terme verschwinden.

§33 Wenn auf die gleiche Weise für die reziproke Reihe der Kuben

$$1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\text{etc.}$$

die zehn Anfangsterme addiert werden, wird man diese Summe derer haben

$$1,197531985674193.$$

Daher wird die Konstante gefunden, die in der Summe hinzuaddiert werden muss, als

$$= 1,202056903159594.$$

Und dieser Zahl ist die Summe der Reihe

$$1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\text{etc.}$$

ins Unendliche fortgesetzt gleich.

Und für die Biquadrate

$$1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\text{etc.}$$

ist die Summe

$$= 1,0823232337110824.$$

§34 Wir wollen nun mit dieser Methode eine Reihe betrachten, mit welcher die Fläche des Kreises, dessen Durchmesser 1 ist, dargeboten wird, natürlich

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.}$$

oder

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \frac{2}{13 \cdot 15} + \text{etc.},$$

deren allgemeiner Term dieser ist

$$\frac{2}{(4x-3)(4x-1)}$$

oder durch Auflösen in Faktoren

$$\frac{1}{4x-3} - \frac{1}{4x-1}.$$

Um also die Summe dieser Reihe mit unserer Methode näherungsweise zu finden, es ist hier

$$X = \frac{1}{4x-3} - \frac{1}{4x-1}$$

sowie

$$\int X dx = \text{Konst.} - \frac{1}{4} \log \frac{4x-1}{4x-3}$$

und auch

$$\frac{dX}{dx} = \frac{-4}{(4x-3)^2} + \frac{4}{(4x-1)^2}, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-4 \cdot 8 \cdot 12}{(4x-3)^4} + \frac{4 \cdot 8 \cdot 12}{(4x-1)^4} \quad \text{etc.}$$

Aus diesen wird die Summe der Reihe

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{2}{(4x-3)(4x-1)} + \text{etc.}$$

sein

$$\begin{aligned} S = \text{Konst.} - \frac{1}{4} \log \frac{4x-1}{4x-3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4x-3} - \frac{1}{4x-1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(4x-3)^2} - \frac{1}{(4x-1)^2}\right) \\ + \frac{8}{15}\left(\frac{1}{(4x-3)^4} - \frac{1}{(4x-1)^4}\right) - \frac{256}{63}\left(\frac{1}{(4x-3)^6} - \frac{1}{(4x-1)^6}\right) \\ + \frac{1024}{15}\left(\frac{1}{(4x-3)^8} - \frac{1}{(4x-1)^8}\right) - \frac{4^8}{33}\left(\frac{1}{(4x-3)^{10}} - \frac{1}{(4x-1)^{10}}\right) + \text{etc.} \end{aligned}$$

Aber diese Reihe, auch wenn zehn Terme addiert werden, konvergiert nicht schnell genug, als dass der Wert der Konstante angenehm dargeboten werden kann. Aber die Konstante bietet viermal genommen die Peripherie des Kreises dar, während der Durchmesser $= 1$ ist.